Inspectoratul Şcolar Judeţean
Harghita

Olimpiada de matematică
etapa zonală – 11 februarie 2012
Barem de corectare

Clasa a X-a

1. Arătați că pentru orice $a,b \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ are loc inegalitatea

$\log_a^2 b + \log_b^2 a \geq \log_a b + \log_b a$

Rezolvare

Fie $x = \log_a b$. Inegalitatea din enunț devine $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq x + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$ $(x-1)(x^3-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0$ inegalitate adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Rezolvați în mulținmea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} 2^x + 3^y = 3 \\ 4^x + 9^y = 5 \end{cases}$

Rezolvare

$2^x = u$, $3^y = v$

Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases}$, de unde rezultă soluțiile

$(u,v) \in \{(1,2),(2,1)\} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,\log_3 2),(1,0)\}$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $|z - 2012| + |z + 2012| = 4024$

Rezolvare

$|z - 2012| + |z + 2012| = |2012 - z| + |z + 2012| \geq |2012 - z + z + 2012| = 4024$

Egalitate are loc dacă $\exists a \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $z + 2012 = a(2012 - z)$ sau $z = 2012$

$$z + 2012 = a(2012 - z) \Leftrightarrow z = \frac{2012(a - 1)}{a + 1} = 2012 - \frac{4024}{a + 1} \in [-2012, 2012)$$

Deci $z \in [-2012, 2012]$

4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $f(x + f(y)) = y + f(x)$ (1) pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare

În (1) $x = 0 \Rightarrow f(f(y)) = y + f(0)$**,** $\forall y \in \mathbb{Q}$

$$0 + f(y) = f(y + f(0)) = f(f(f(y))) = f(y) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(f(y)) = y, \ \forall y \in \mathbb{Q}$$

În (1) $y \to f(y) \Rightarrow f(x + f(f(y))) = f(y) + f(x) \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$ **(2),**
$\forall x, y \in \mathbb{Q}$

Prin inducție se demonsrează că $f(nx) = nf(x)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = nf(1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

În (2) $y = -x \Rightarrow 0 = f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\forall y \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(-n) = -nf(1)$
$\forall n \in \mathbb{N}$. Deci $f(n) = an$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, unde $a = f(1)$.

$$f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^*$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = ma\frac{1}{n} = a\frac{m}{n}, \ \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*.$$

Deci $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{Q}$

Înlocuim în (1) $a(x + ay) = y + ax$, $\forall x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2 = 1$

Deci funcțiile care satisfac relația sunt $f(x) = x$ și $f(x) = -x$